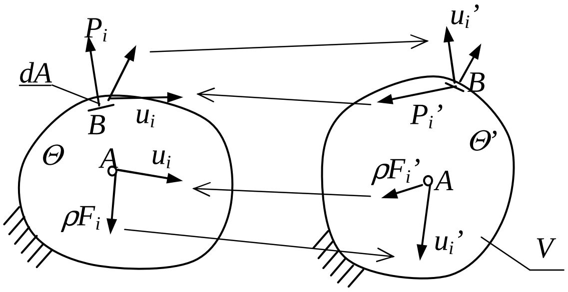
Rozdział VIII

Twierdzenie o wzajemności

Twierdzenie o wzajemności dla niesprzężonych zadań termosprężystości ma postać podaną przez W. M. Majziela

$$\int_A P_i u_i^{'} dA + \int_V \rho F_i u_i^{'} dV + \gamma \int_V \Theta \varepsilon_{kk}^{'} dV = \int_A P_i^{'} u_i dA + \int_V \rho F_i^{'} u_i dV + \gamma \int_V \Theta^{'} \varepsilon_{kk} dV$$

W równaniu tym występują dwa układy przyczyn: podstawowy - $\{\rho F_i, P_i, \rho r, \Theta\}$ oraz pomocniczy - $\{\rho F_i^{'}, P_i^{'}, \rho r^{'}, \Theta^{'}\}$, które wywołują skutki czyli pola przemieszczeń i temperatur $\{u_i, \Theta\}$, $\{u_i^{'}, \Theta^{'}\}$.



Rys. 8.0 Twierdzenie o wzajemności

Twierdzenie to posłuży nam do przedstawienia kilku interesujących, ogólnych własności rozwiązań zadań sprężystych i lepkosprężystych.

ZADANIE 8.1.

Należy określić zmianę objętości ΔV izotropowego ciała sprężystego pod działaniem sił masowych i powierzchniowych.

Rozwiązanie:
Analizować będziemy dwa układy przyczyn i skutków. W pierwszym zadaniu wystąpi hydrostatyczne ciśnienie p a pole przemieszczeń u_i ma postać

$$u_i' = A x_i \rightarrow \varepsilon_{ij}' = A\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{kk}' = 3A$$

$$\sigma_{ij}' = 2G\varepsilon_{ij}' + \lambda\varepsilon_{kk}'\delta_{ij} = \frac{E}{1+v}\left(\varepsilon_{ij}' + \frac{v}{1-2v}\varepsilon_{kk}'\delta_{ij}\right)$$

$$\sigma_{ij}' = \frac{E}{1+v}\left(A + \frac{3Av}{1-2v}\right)\delta_{ij} = \frac{EA}{1-2v}\delta_{ij} = p\,\delta_{ij}$$

Naprężenia są więc stałe (ciśnienie hydrostatyczne) stąd $\sigma'_{ij,j} \equiv 0$.

Stała A wynosi $A = \frac{p(1-2v)}{E}$.

Ostatecznie pole przemieszczeń i naprężeń określają zależności

$$u_i' = \frac{1-2v}{E} p x_i, \quad \sigma_{ij}' = p\,\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}' = \frac{1-2v}{E} p\,\delta_{ij}$$

Wypisując twierdzenie o wzajemności dla pewnego dowolnego układu przyczyn $\{P_i, \rho F_i\}$ oraz hydrostatycznego ciśnienia $\{u_i', \sigma_{ij}' = p\,\delta_{ij}\}$ - jako zadanie z primami otrzymamy

$$\left\{\int_A P_i x_i dA + \int_V \rho F_i x_i dV\right\}\frac{1-2v}{E} p = \int_V p\,\varepsilon_{kk} dV + 0$$

ślad tensora deformacji ε_{kk} jest równy przyrostowi objętości ΔV, stąd

$$\int_V \varepsilon_{kk} dV = \varepsilon_{kk}^{sr}\int_V dV = \Delta V \cdot V$$

Przyrost objętości wynosi

$$\Delta V = \frac{1-2v}{EV}\left\{\int_A P_i x_i dA + \int_V \rho F_i x_i dV\right\}$$

Wzór ten określa przyrost objętości ciała w wyniku działania dowolnych sił P_i i ρF_i.

ZADANIE 8.2.

Należy określić zmianę objętości (globalną) wywołaną tylko przyrostem temperatury $\left(\rho F_i = 0, \quad P_i = 0, \quad \Theta \neq 0, \quad \rho F_i^{'} = 0, \quad P_i' = 0, \quad \Theta' \neq 0\right)$.

Rozwiązanie:
Równanie twierdzenia o wzajemności ma wówczas postać

$$\gamma \int_V \Theta \cdot \frac{3p}{E}(1-2\nu)dV = \int_V \sigma_{ij}^{'}\varepsilon_{ij}\,dV = \int_V p\delta_{ij}\varepsilon_{ij}\,dV = p\int_V \varepsilon_{ii}\,dV = p\Delta V \cdot V \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta V = \frac{\gamma}{V}\int_V \Theta \frac{3(1-2\nu)}{E}\,dV,$$

gdzie $\gamma = \alpha_T(2\mu + 3\lambda) = \alpha_T\left(\frac{E}{1+\nu} + \frac{3\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right) = \alpha_T \frac{E}{1-2\nu}$

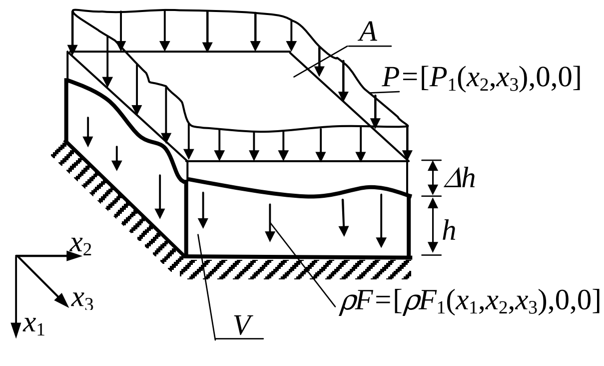
Ostatecznie

$$\Delta V = \frac{1}{V}\alpha_T \frac{E}{1-2\nu}\cdot\frac{3(1-2\nu)}{E}\int_V \Theta\,dV \rightarrow \Delta V = \frac{3\alpha_T}{V}\int_V \Theta\,dV$$

Wynik ten jest niezależny od mechanicznych stałych materiałowych.

ZADANIE 8.3.

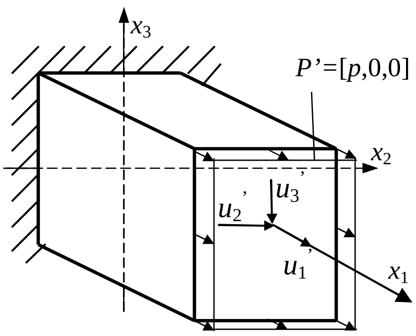
Należy określić średnią wartość skrócenia warstwy sprężystej o grubości h, dowolnie obciążonej siłami masowymi i powierzchniowymi.



Rys. 8.3a Układ podstawowy

Rozwiązanie:

Analizować będziemy pomocnicze zadanie określające jednoosiowe rozciąganie. Problem ten określa układ równań na przemieszczenie u_i'



Rys. 8.3b Zadanie pomocnicze

$$u_1' = \frac{p}{E}x_1, \quad u_2' = -\frac{pv}{E}x_2, \quad u_3' = -\frac{pv}{E}x_3$$

$$\varepsilon_{ij}' = \frac{p}{E}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -v & 0 \\ 0 & 0 & -v \end{bmatrix} \quad , \quad \varepsilon_{kk}' = \frac{p}{E}(1-2v), \quad \sigma_{ij}' = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{11}' = \frac{E}{1+v}\left(\frac{p}{E} + \frac{v}{(1-2v)}\frac{p}{E}(1-2v)\right) = p$$

$$\sigma_{22}' = \frac{E}{1+v}\left(-\frac{pv}{E} + \frac{v}{(1-2v)}\frac{p}{E}(1-2v)\right) = 0 = \sigma_{33}'$$

Twierdzenie o wzajemności dla dowolnego układu obciążeń $(u_i\,,\ \sigma_{ij})$ i pól $(u_i',\ \sigma_{ij}')$ przyjmie formę

$$\int_V \sigma_{ij}'\varepsilon_{ij}dV = \int_V \sigma_{11}'\varepsilon_{11}dV = p\int_V \varepsilon_{11}dV = p\varepsilon_{11}^{sr}V \qquad \text{oraz} \qquad \Delta h = \varepsilon_{11}^{sr}h$$

$$\varepsilon_{11}^{sr} = \frac{1}{pV}\left\{\int_A \left(P_1 \frac{p}{E} x_1 - P_2 \frac{pv}{E} x_2 - P_3 \frac{pv}{E} x_3 \right) dA + \right.$$

$$\left. + \int_V \left(\rho F_1 \frac{p}{E} x_1 - \rho F_2 \frac{pv}{E} x_2 - \rho F_3 \frac{pv}{E} x_3 \right) dV \right\}$$

Ostatecznie średnia wartość skrócenia warstwy sprężystej wynosi

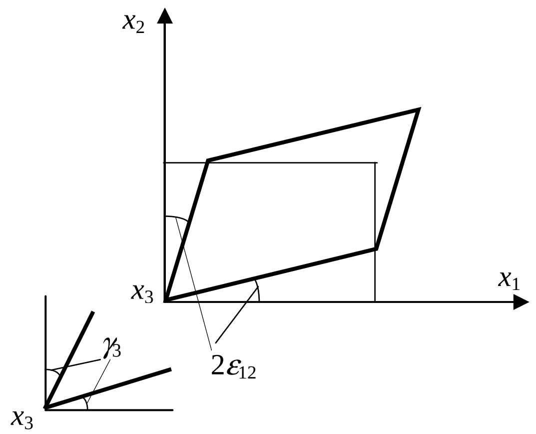
$$\Delta h = \frac{h}{VE}\left\{\int_A \left(P_1 x_1 - v P_2 x_2 - v P_3 x_3 \right) dA + \right.$$

$$\left. + \int_V \left(\rho\, F_1 x_1 - v \rho\, F_2 x_2 - v \rho\, F_3 x_3 \right) dV \right\}$$

Otrzymany wzór ma charakter ogólny i dotyczy każdego przypadku obciążeń warstwy, prowadzącego do jednoosiowego stanu naprężenia.

ZADANIE 8.4.

Poszukujemy średniej wartości kąta odkształcenia postaciowego ε_{12} powstałego przy działaniu obciążeń powierzchniowych i sił masowych w izotropowym ciele sprężystym.



Rys. 8.4. Odkształcenie $\varepsilon_{12}^{'}$ w zadaniu pomocniczym

Rozwiązanie:

W celu rozwiązania problemu analizujemy zadanie pomocnicze określone przez pole przemieszczeń u_i', odkształceń ε_{ij}' i naprężeń σ_{ij}'

$$2u_1' = Ax_2, \quad 2u_2' = Ax_1, \quad u_3' = 0$$

$$\varepsilon_{ij}' = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{kk}' = 0, \quad \sigma_{ij}' = 2G \begin{bmatrix} 0 & A & 0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{ij,j}' = 0, \quad 2GAn_1 = p_2'$$

Równanie twierdzenia o wzajemności przyjmie tu formę

$$\int_V \sigma_{ij}'\varepsilon_{ij}dV = \int_V \left(\sigma_{12}'\varepsilon_{12} + \sigma_{21}'\varepsilon_{21}\right)dV = 2GA\int_V \left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}\right)dV = 2GA\gamma_3^{sr}V$$

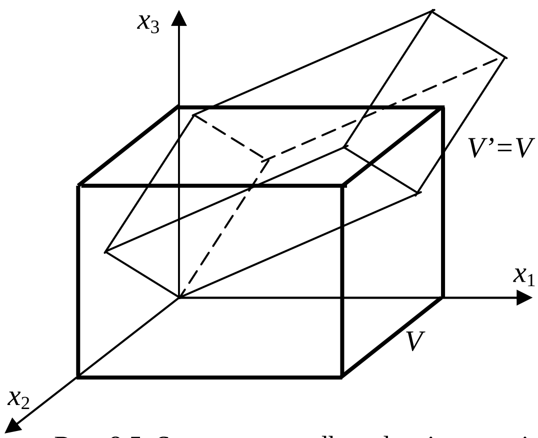
stąd

$$\gamma_3^{sr} = \frac{1}{2GA}\left(\int_A p_i u_i' dA + \int_V \rho F_i u_i' dV\right) =$$

$$= \frac{1}{4GV}\left[\int_A \left(p_1 x_2 + p_2 x_1\right)dA + \int_V \left(\rho F_1 x_2 + \rho F_2 x_1\right)dV\right]$$

ZADANIE 8.5.

Należy wyznaczyć średnią wartość odkształceń postaciowych w ośrodku, czyli $\varepsilon_{12}+\varepsilon_{13}+\varepsilon_{23}$ wywołaną działaniem dowolnego układu sił powierzchniowych i objętościowych w ciele sprężystym.



Rys. 8.5. Symetryczne odkształcenia postaciowe

Rozwiązanie:

Będziemy analizować zadanie pomocnicze określone przez pole przemieszczeń

$$2u_1' = A(x_2 + x_3), \quad 2u_2' = A(x_1 + x_3), \quad 2u_3' = A(x_2 + x_3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & A & A \\ A & 0 & A \\ A & A & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{\mathrm{ij}} = 2G \begin{bmatrix} 0 & A & A \\ A & 0 & A \\ A & A & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{ij,j} = 0$$

Równania twierdzenia o wzajemności dają relacje łączące siły z odkształceniami postaciowymi

$$L = \int_A P_i u_i' dA + \int_V \rho F_i u_i' dV = \frac{A}{2}\left\{ \int_A P_1(x_2 + x_3) + P_2(x_1 + x_3) + P_3(x_1 + x_2)\, dA + \right.$$

$$\left. + \int_V \rho F_1(x_2 + x_3) + \rho F_2(x_1 + x_3) + \rho F_3(x_1 + x_2)\, dV \right\}$$

$$P = 2GA \int_V (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23}) dV = 2GA\gamma_{sr} V$$

czyli średnia wartość odkształceń postaciowych przyjmie postać

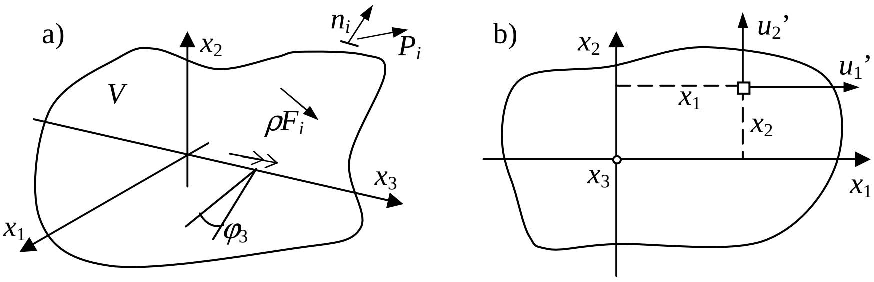
$$\gamma_{sr} = \frac{1}{4GV}\left\{ \int_A P_1(x_2 + x_3) + P_2(x_1 + x_3) + P_3(x_1 + x_2)\, dA + \right.$$

$$\left. + \int_V \rho F_1(x_2 + x_3) + \rho F_2(x_1 + x_3) + \rho F_3(x_1 + x_2)\, dV \right\}$$

Oczywiście zmiany postaciowe w analizowanych przypadkach nie mogą być wywołane przez zmiany temperatur. Istotnie, w obu zadaniach $\varepsilon_{kk} = 0$, stąd i całka $\gamma \int_V \Theta \varepsilon_{kk} dV = 0$, a to oznacza, że przyrost temperatur nie wywoła zmian postaciowych w izotropowym ciele sprężystym, czego się należało spodziewać. Zauważmy, że zadanie 8.5 jest złożeniem trzech odkształceń elementarnych przedstawionych w zadaniu 8.4.

ZADANIE 8.6.

Należy określić średni kąt skręcenia wokół ustalonej osi (x_3) w dowolnym izotropowym ciele sprężystym.



Rys. 8.6. Układ podstawowy (a) i pomocniczy (b) do wyznaczania średniego skręcenia

Rozwiązanie:

Pole przemieszczeń $u_i^{'}$ ma tu postać analogiczną, jak przy skręcaniu pręta kołowego $u_1^{'} = -Ax_2x_3, \quad u_2^{'} = Ax_1x_3, \quad u_3^{'} = 0$

Wyznaczymy współrzędne tensorów $\varepsilon_{ij}^{'}, \ \sigma_{ij}^{'}$.

$$\varepsilon_{ij}^{'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{Ax_2}{2} \\ 0 & 0 & +\dfrac{Ax_1}{2} \\ -\dfrac{Ax_2}{2} & +\dfrac{Ax_1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{ij}^{'} = GA \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_{ij,j} \equiv 0$$

Wypisujemy z kolei twierdzenie o wzajemności dla stanu $\{u_i^{'}, P_i^{'}\}$ i $\{u_i, P_i\}$.

$$L = \int_A P_i u_i^{'} dA + \int_V \rho F_i u_i^{'} dV =$$

$$= A\left[\int_A (-P_1x_2x_3 + P_2x_1x_3) dA + \int_V (-\rho F_1 x_2x_3 + \rho F_2 x_1x_3) dV\right]$$

$$P = \int_V \sigma_{ij}^{'} \varepsilon_{ij} dV = GA\int_V \left(-x_2\varepsilon_{13} + x_1\varepsilon_{23} - x_2\varepsilon_{31} + x_1\varepsilon_{32}\right) dV = 2\varphi_{sr} VGA$$

średni kąt skręcenia wokół osi x_3 wynosi

$$\varphi_{sr} = \frac{1}{2GV}\left\{\int_A \left(-P_1x_2x_3 + P_2x_1x_3\right)dA + \int_V \left(\rho F_1x_2x_3 + \rho F_2x_1x_3\right)dV\right\}$$

Oczywiście podobnie jak poprzednio przyrost temperatury nie zmieni wartości średniego kąta skręcenia ośrodka.

ZADANIE 8.7.

Wykazać, że pole przemieszczeń postaci $u_i = \varepsilon_{ijk}x_ja_k$ dla dowolnego, stałego wektora a_k opisywać może jedynie sztywny obrót.

Rozwiązanie:
Pole przemieszczeń u_1, u_2, u_3 po rozpisaniu ma postać

$$u_1 = \left(x_2a_3 - a_2x_3\right),\quad u_2 = -\left(x_1a_3 - x_3a_1\right),\quad u_3 = \left(x_2a_1 - x_1a_2\right)$$

Obliczając następnie współrzędne tensora odkształceń ε_{ij} stwierdzamy, że $\varepsilon_{ij} \equiv 0$.

Zadania lepkosprężyste

Zadania z tego zakresu stanowią uogólnienie zadań sprężystych poprzednio analizowanych. Interesujące są też współzależności między analogicznymi zadaniami sprężystymi a lepkosprężystymi.

Twierdzenie o wzajemności dla anizotropowych dystorsji lepkosprężystych ε_{kl}^o opisanych równaniami fizycznymi

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} * d\,(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^o)$$

ma postać

$$\int_A P_i * du_i^{'} dA + \int_V \rho F_i * du_i^{'} dV + \int_V E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl}^o * d\varepsilon_{ij}^{o'} dV =$$
$$= \int_A P_i^{'} * du_i dA + \int_V \rho F_i^{'} * du_i dV + \int_V E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl}^{o'} * d\varepsilon_{ij}^o dV$$

Analizowano w tym przypadku dwa układy pól
$\left\{P_i,\ \rho\ \ _i,\ u_i,\ \varepsilon_{ij}^o\right\}$, $\left\{P_i^{'},\ \rho\ \ _i^{'},\ u_i^{'},\ \varepsilon_{ij}^{o'}\right\}$

działających na ciało lepkosprężyste, w którym oprócz obciążeń mechanicznych $P_i = \sigma_{ij} n_j$, ρF_i , występują też pola dystorsyjne ε^o_{ij}, które mogą być wywołane zarówno wpływami pól temperatur Θ

$$\varepsilon^o_{ij} = \alpha^T_{ij} \Theta ,$$

dyfundujących składników c

$$\varepsilon^o_{ij} = \alpha^c_{ij} c ,$$

defektów struktury opisanych tensorem uszkodzeń φ_{ij}

$$\varepsilon^o_{ij} = \alpha^s_{ijkl} \varphi_{kl}$$

jak i polem elektrycznym E_k

$$\varepsilon^o_{ij} = \alpha^E_{ijk} E_k$$

w powyższych zależnościach tensory α^T_{ij}, α^c_{ij}, α^s_{ijkl}, α^E_{ijk} są zmianami odkształceń wywołanymi odpowiednio przez jednostkowy przyrost temperatury, stężenia, tensora uszkodzeń oraz pola elektrycznego E_k. Podane tutaj twierdzenie o wzajemności dotyczy ogólnego przypadku dystorsji w ośrodku anizotropowym. Istnieją więc jego przypadki szczególne odnoszące się m.in. do materiałów ortotropowych, transwersalno-izotropowych, izotropowych itp.

ZADANIE 8.8.

Korzystając ze wzorów na wszechstronne ściskanie $\sigma^{'}_{ij} = p\delta_{ij}$ należy wyznaczyć zmianę objętości w ośrodku lepkosprężystym

Rozwiązanie:
Pole przemieszczeń ma postać

$$u'_i = A(t)\, x_i \rightarrow \varepsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}, \quad \varepsilon'_{kk} = 3A, \; \sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Tensor naprężeń wyznaczymy z równań fizycznych

$$\sigma'_{ij} = \frac{E}{1+v} * \left(d\varepsilon_{ij} + \frac{v}{1-2v} d\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \right) \rightarrow \sigma'_{11} = \frac{E}{1+v} * \left(dA + \frac{3v}{1-2v} dA \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma'_{11} = \frac{E}{1+v} * \left(\frac{1+v}{1-2v} \right) dA \rightarrow \sigma'_{11} = \frac{1}{1-2v} E * dA \quad \text{ale} \quad \sigma_{11} = p\delta_{11} = p$$

"stała" *A(t)* określona jest zależnością

$$E * dA = (1-2v)\, p$$

związek między ciśnieniem hydrostatycznym p a polem przemieszczeń u_i ma formę

$$du'_i = dAx_i \rightarrow E * du'_i = E * dAx_i \rightarrow E * du'_i = (1-2v)\, px_i$$

Twierdzenie o wzajemności wypisujemy w tym przypadku dla dowolnego układu obciążeń oraz hydrostatycznego ciśnienia w ciele lepkosprężystym.

$$\int_A P_i * du'_i dA + \int_V \rho F_i * du'_i dV = \int_V \sigma'_{ij} * d\varepsilon_{ij} dV \qquad \Big| * E$$

mnożąc splotowo stronami równanie to przez funkcję relaksacji $E(t)$ otrzymujemy

$$\int_A P_i * E * du'_i dA + \int_V \rho F_i * E * du'_i dV = \int_V E * \sigma'_{ij} * d\varepsilon_{ij} dV$$

$$(1-2v)\int_A P_i * px_i dA + (1-2v)\int_V \rho F_i * px_i dV = \int_V E * p * d\varepsilon_{ii} dV$$

$$\int_A P_i x_i dA + \int_V \rho F_i x_i dV = \frac{1}{1-2v}\int_V E * d\varepsilon_{ii} dV \qquad \Big| * \mathrm{E}^{-1}$$

Ostatecznie wzór na zmianę objętości ma formę

$$(1-2v)\, E^{-1} * \left(\int_A P_i x_i dA + \int_V \rho F_i x_i dV \right) = \int_V d\varepsilon_{ii}^{v-e} dV$$

gdzie $E^{-1} * E = \delta$.

Tutaj E^{-1} oznacza retransformatę z odwrotności transformaty Laplace'a funkcji relaksacji E, a δ jest deltą Diraca.

Zauważmy, że w zadaniu sprężystym analogiczny wzór przyjmie postać

$$\frac{1-2v}{E}\left(\int_A P_i x_i dA + \int_V \rho F_i x_i dV\right) = \int_V \varepsilon_{ii}^e dV$$

Porównując wzory na zmianę objętości w (e) i (v-e) otrzymamy

$$\frac{1}{1-2v}\int_V E * d\varepsilon_{ii}^{v-e} dV = \frac{1}{1-2v}\int_V E_o \varepsilon_{ii}^e dV \rightarrow \int_V E * d\varepsilon_{ii}^{v-e} dV = \int_V E_o \varepsilon_{ii}^e dV$$

Wynika stąd ważny wniosek, że ten sam układ sił działający na ciało sprężyste (e) i lepkosprężyste (v-e) wywołuje różne zmiany objętości określone zależnościami

$$\int_V \varepsilon_{ii}^e dV = \int_V \frac{1}{E_o} E * d\varepsilon_{ii}^{v-e} dV$$

ZADANIE 8.9.

Należy określić zmianę objętości w transwersalno-izotropowym ciele sprężystym i lepkosprężystym wywołaną dowolnymi obciążeniami powierzchniowymi i masowymi.

Rozwiązanie:

Jako układ pomocniczy (z primami) przyjmiemy ciśnienie hydrostatyczne $\sigma_{ij}^{'} = p\delta_{ij}$, które w ciele transwersalno-izotropowym prowadzi do pola przemieszczeń u_i postaci

$$u_1^{'} = A(t)\,x_1, \quad u_2^{'} = A(t)\,x_2, \quad u_3^{'} = B(t)\,x_3 \text{, stąd } \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$$

Składowe tensora naprężeń σ_{ij} mają formę

$$\sigma_{11}^{'} = c_{11} * d\varepsilon_{11} + c_{12} * d\varepsilon_{22} + c_{13} * d\varepsilon_{33} = (c_{11} + c_{12}) * dA + c_{13} * dB = p$$

$$\sigma'_{11} = \sigma'_{22}$$

$$\sigma'_{33} = c_{13} * d\varepsilon_{11} + c_{13} * d\varepsilon_{22} + c_{33} * d\varepsilon_{33} = 2c_{13} * dA + c_{33} * dB = p$$

gdzie c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33} są funkcjami relaksacji materiału.

Funkcje A i B wyznaczymy z równań

$$\left[c_{33} * (c_{11} + c_{12}) - 2c_{13} * c_{13}\right] * dA = (c_{33} + c_{13}) * p \rightarrow A(t) = \alpha(t) * p$$

$$\left[\, 2c_{13} * c_{13} - c_{33} * (c_{11} + c_{12})\right] * dB = (2c_{13} - c_{11} - c_{12}) * p \rightarrow B(t) = \beta(t) * p$$

gdzie $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ należy wyznaczyć wykorzystując transformacje całkowe Laplace'a.

Ostatecznie pole przemieszczeń ma postać

$$u'_1 = \alpha(t) * px_1, \quad u'_2 = \alpha(t) * px_2, \; u'_{13} = \beta(t) * px_3$$

Wypiszemy teraz twierdzenie o wzajemności dla dowolnego pola obciążeń i układu z primami, które dotyczą ciśnienia hydrostatycznego.

$$\int_A \left[P_1 * d\left(\alpha(t) * px_1\right) + P_2 * d\left(\alpha(t) * px_2\right) + P_3 * d\left(\beta(t) * px_3\right)\right] dA +$$
$$+ \int_V \left[\rho F_1 * d\left(\alpha(t) * px_1\right) + \rho F_2 * d\left(\alpha(t) * px_2\right) + \rho F_3 * d\left(\beta(t) * px_3\right)\right] dV =$$
$$= \int_V p * d\varepsilon_{kk} dV$$

Przyjmując średni przyrost objętości w formie $\dfrac{\Delta V}{V} = \int_V d\varepsilon_{kk} dV$ uzyskamy

$$\frac{\Delta V}{V} = \int_A \left[P_1 * d\alpha(t)x_1 + P_2 * d\alpha(t)x_2 + P_3 * d\beta(t)x_3\right] dA +$$
$$+ \int_V \left[\rho F_1 * d\alpha(t)x_1 + \rho F_2 * d\alpha(t)x_2 + \rho F_3 * d\beta(t)x_3\right] dV$$

Wzór ten pozwala obliczyć przyrost objętości transwersalno-izotropowego ciała o objętości V, polu powierzchni A w którym występują siły masowe ρF_i i powierzchniowe P_i, natomiast funkcje czasu $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ wyznaczymy na podstawie znajomości funkcji relaksacji c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}.

Podobne rozważania można przeprowadzić dla transwersalno-izotropowej warstwy sprężystej lub lepkosprężystej.

ZADANIE 8.10.

Analizować będziemy ogólny przypadek liniowego, anizotropowego ciała sprężystego, w którym występują siły powierzchniowe P_i i objętościowe ρF_i. Jako zadanie z primami przyjmiemy pole przemieszczeń postaci $u_i^{'} = Ax_i$. Należy zbadać współzależności między obu polami, tj. dowolnym polem obciążeń w ośrodku oraz polem $u_i^{'}$ odpowiadającym izotropowemu wydłużeniu.

Rozwiązanie:

Pole przemieszczeń $u_i^{'} = Bx_i$ prowadzi do pola odkształceń

$$\varepsilon_{ij}^{'} = B\delta_{ij}$$

oraz pola naprężeń

$$\sigma_{ij}^{'} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{'} = E_{ijkl}B\delta_{kl} = E_{ijkk}B$$

Pole naprężeń $\sigma_{ij}^{'}$ spełnia równania równowagi wewnętrznej $\left(\sigma_{ij,j}^{'} \equiv 0\right)$ oraz naprężeniowe warunki brzegowe

$$\sigma_{ij}^{'}n_j = P_i^{'} \rightarrow E_{ijkk}B\,n_j = P_i^{'}$$

Wypiszmy teraz twierdzenie o wzajemności dla dowolnego pola obciążeń $\{P_i,\ \rho F_i,\ u_i\}$ oraz pola $\{P_i^{'},\ u_i^{'}\}$

$$\int_A P_i u_i^{'} dA + \int_V \rho F_i u_i^{'} dV = \int_V \sigma_{ij}^{'}\varepsilon_{ij} dV$$

Będzie

$$\int_A P_i x_i B\, dA + \int_V \rho F_i x_i B\, dV = \int_V E_{ijkk} B\varepsilon_{ij} dV$$

stąd

$$\int_A P_i x_i dA + \int_V \rho F_i x_i dV = \int_V E_{ijkk}\varepsilon_{ij} dV$$

Zależność powyższa stanowi uogólnienie wzorów pozwalających na określenie przyrostów objętości w ciele izotropowym.

Prześledzimy jeszcze analogiczne rozważania w przypadku ciał lepkosprężystych. Pole przemieszczeń ma wówczas postać $u_i^{'} = B(t)x_i$, stąd $\varepsilon_{ij}^{'} = B(t)\delta_{ij}$. Tutaj B jest pewną funkcją czasu.

$$\sigma_{ij}^{'} = E_{ijkl} * d\varepsilon_{kl}^{'} = E_{ijkk} * dB$$

Postępując analogicznie jak poprzednio otrzymamy

$$\int_A P_i * d\,u'_i\, dA + \int_V \rho F_i * d\,u'_i\, dV = \int_V \sigma_{ij}^{'} * d\varepsilon_{ij} dV$$

stąd

$$\int_A P_i * dBx_i dA + \int_V \rho F_i * dBx_i dV = \int_V \left(E_{ijkk} * dB\right) * d\varepsilon_{ij} dV$$

oraz

$$\int_A P_i x_i dA + \int_V \rho F_i x_i dV = \int_V E_{ijkk} * d\varepsilon_{ij} dV$$

Porównując wzory wynikające z twierdzenia o wzajemności w zadaniach sprężystych i lepkosprężystych stwierdzamy, że w przypadku dwóch ośrodków o takiej samej konfiguracji poddanych identycznym obciążeniom, lewe strony relacji wynikających z twierdzenia o wzajemności są takie same, stąd

$$\int_V E_{ijkk} \varepsilon_{ij}^{e} dV = \int_V E_{ijkk} * d\varepsilon_{ij}^{v-e} dV$$

ZADANIE 8.11.

Należy określić średnią wartość odkształceń postaciowych w izotropowym ciele sprężystym i lepkosprężystym o objętości *V*, tj. należy wyznaczyć wielkość

$$\varphi^{o} = \frac{1}{V} \int_V \left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23}\right) dV$$

Rozwiązanie:

Jako zadanie pomocnicze (z primami) analizować będziemy pole przemieszczeń postaci

$$u_1' = A(x_2 + x_3), \quad u_2' = A(x_1 + x_3), \quad u_3' = A(x_1 + x_2)$$

tensory odkształceń ε_{ij}' i naprężeń σ_{ij}' mają postać

$$\varepsilon_{ij}' = A(e_i e_j - \delta_{ij}), \quad \varepsilon_{ii}' = 0 \quad i \quad \sigma_{ij}' = 2G\varepsilon_{ij}' = 2GA(e_i e_j - \delta_{ij})$$

lub

$$2\varepsilon_{ij}' = \begin{bmatrix} 0 & A & A \\ A & 0 & A \\ A & A & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_{ij}' = GA\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie $e_i\, e_j$ jest iloczynem tensorowym wersorów e_i i e_j.

Wypisując twierdzenie o wzajemności dla dowolnego pola obciążeń i pola pomocniczego (z primami) otrzymamy

$$A\int_A \left[P_1(x_2 + x_3) + P_2(x_1 + x_3) + P_3(x_1 + x_2)\right] dA +$$
$$+ A\int_V \left[\rho F_1(x_2 + x_3) + \rho F_2(x_1 + x_3) + \rho F_3(x_1 + x_2)\right] dV =$$
$$= 2GA\int_V (e_i e_j - \delta_{ij})\, \varepsilon_{ij}\, dV = 2GA\int_V 2\,(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23})\, dV = 4GAV\varphi^o$$

stąd średnia wartość odkształceń postaciowych φ wynosi

$$\varphi^o = \frac{1}{4GV}\left\{\int_A \left[P_1(x_2 + x_3) + P_2(x_1 + x_3) + P_3(x_1 + x_2)\right] dA + \right.$$
$$\left. + \int_V \left[\rho F_1(x_2 + x_3) + \rho F_2(x_1 + x_3) + \rho F_3(x_1 + x_2)\right] dV \right\}$$

Podobnie jak w przypadku zmian objętościowych można i tu wykazać, że odkształcenia postaciowe w dwóch analizowanych zadaniach sprężystych i lepkosprężystych łączy zależność całkowa

$$\int_V G\,(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23})^{(e)}\, dV = \int_V G * (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23})^{(v-e)}\, dV$$

w której odkształcenia w lewej całce dotyczą zadania sprężystego, zaś w prawej lepkosprężystego.